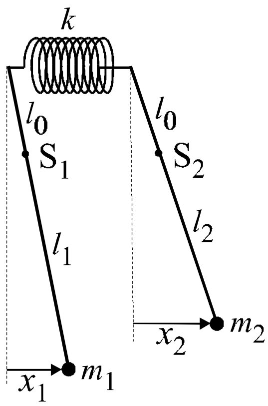
Tentamen Golven en Optica (18/3/99, 9.00-12.00, zaal 5118.-152)

Begin <u>iedere opgave</u> op een <u>apart vel papier</u> en zet daarop je naam. Vermeld op het eerste vel je naam, geboortedatum, studentnummer, studierichting, eerste jaar van inschrijving, adres met postcode, en het aantal ingeleverde bladen.
puntenverdeling: 1=30[8+8+7+7], 2=30[8+7+8+7], 3=30[7+8+9+6]

Vraagstuk 1



Twee (stijve) slingers draaien om (vaste) scharnierpunten S_1 en S_2. De linker slinger, waaraan een massa m_1 hangt (zie figuur), heeft een lengte l_1 onder het scharnierpunt en l_0 erboven, de rechter met massa m_2 heeft een lengte l_2 onder het scharnierpunt en l_0 erboven. De slingers zijn gekoppeld zoals in de figuur getekend, met een (massaloze) veer met veerconstante k. De uitwijkingen van de slingers worden aangeduid met respectievelijk x_1 en x_2, positief gedefiniëerd voor een uitwijking naar rechts.

a. Stel voor elk van de slingers de differentiaalvergelijking voor de beweging op, met x_1 en x_2 als coördinaten.

Voor een bepaalde keus van de massa's, lengtes, en veerconstante krijgen de bewegings-vergelijkingen de vorm

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -6x_1 + 2x_2 \quad \text{en} \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} = x_1 - 12x_2$$

b. Bereken de eigenfrequenties van dit systeem.
c. Bereken de verhouding van de uitwijkingen x_1 en x_2 van de twee slingers voor elk van de eigentrillingen.
d. Stel dat m_1=m_2, l_0=l_1=l_2 en k=1 N/m. Beredeneer (kwalitatief) welke eigentrillingen je verwacht, en bepaal op grond hiervan hoe groot de bijbehorende eigenfrequenties zijn.

Vraagstuk 2

Een horizontaal gerichte laserbundel is gericht op een raam van een huis. De brekingsindex van het glas van de ruit is n_g=1,45. De hoek tussen de bundel en de normaal op de ruit is q. De bundel is horizontaal gepolariseerd en is 3 mm breed.

a. Leidt de formule af voor de reflectiecoëfficiënt $r_p = E_{gereflecteerd} / E_{opvallend}$ voor weerkaatsing tegen de voorkant van de ruit, met E de grootte van het electrisch veld en r_p een functie van de brekingsindexverhouding n (hier n=n_g/n_{lucht}), de hoek van inval q en de hoek j van de doorgelaten bundel. Maak hierbij gebruik van de eis dat aan weerskanten van het grensvlak de tangentiële componenten van de electrische en magnetische vectoren van het licht gelijk moeten zijn.

Neem nu aan dat r_p als functie van n en q gegeven wordt door:

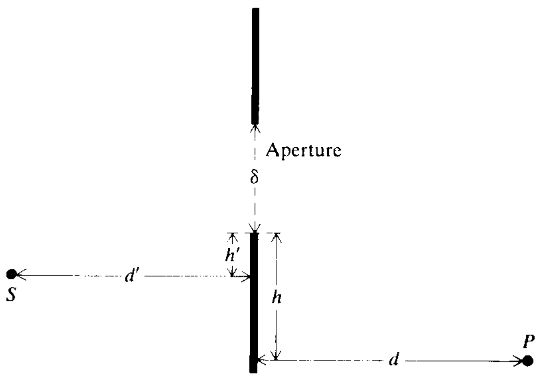
$$r_p = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 q} - n^2 \cos q}{\sqrt{n^2 - \sin^2 q} + n^2 \cos q}$$

b. Leidt hieruit de formule af voor de reflectiecoëfficiënt van deze bundel tegen de achterkant van de ruit. Druk vervolgens $r_{p,voorkant}$ uit in $r_{p,achterkant}$.

c. Bereken de intreedhoek q waarbij het volledige vermogen van de laserbundel in de kamer beschikbaar is. Beschouw hierbij zowel de reflectie aan de voorkant van de ruit als die aan de achterkant.

d. Het vermogen van de bundel is 20 mW, de intreedhoek 10°. De ruit is ongeveer 5 mm dik, maar de dikte is niet constant en varieert meer dan de golflengte van het licht over afstanden kleiner dan 1 mm. Bereken het gereflecteerde vermogen; verwaarloos hierbij de bijdrage van de tweede en verdere reflecties aan de achterkant van de ruit.

Vraagstuk 3



De figuur links geeft een situatieschets van een apertuur (van de zijkant bekeken). Monochromatisch licht verlaat de bron *S*, en wordt na diffractie opgevangen in punt *P*.

a. Leg aan de hand van een schetsje uit wat het verschil is tussen *Fraunhofer* en *Fresnel* diffractie.

De langste weg die het licht van *S* naar *P* kan afleggen is via de bovenkant van de apertuur, de kortste weg loopt via de onderkant. Het verschil tussen die weglengtes, Δ, kan ontwikkeld worden in een machtreeks in *d*, de breedte van de apertuur:

$$\Delta = \left(\frac{h'}{d'} + \frac{h}{d}\right) d + \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{d'} + \frac{1}{d}\right) d^{\,2} + \ldots$$

b. Geef een fysische interpretatie van de kwadratische term in deze vergelijking, en leid een kwantitatief criterium voor het al dan niet optreden van Fraunhofer diffractie af.

Gegeven is nu een rechthoekige apertuur met breedte *a* en hoogte *b*; loodrecht hierop valt een vlakke golf met golfgetal *k*. Onder bepaalde voorwaarden kan men de diffractie-integraal (formule van Fresnel-Kirchhoff) schrijven als

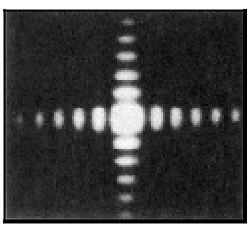
$$U(X,Y) = C \iint e^{ikr}\, dA$$

Hierin zijn (*X*,*Y*) coördinaten in het vlak waar het diffractiepatroon wordt waargenomen, *A* de diffractie-apertuur, *C* een constante, en *r* de afstand tussen een punt in de apertuur en (*X*,*Y*).

c. Bereken met behulp van de bovenstaande Fresnel-Kirchhoff formule de amplitude van het (Fraunhofer) diffractiepatroon voor de gegeven apertuur, en laat zien dat de irradiantie wordt gegeven door

$$I = I_0 \left(\frac{\sin a}{a}\right)^2 \left(\frac{\sin b}{b}\right)^2$$

met I_0 een constante, $a = \tfrac{1}{2} ka \sin j$ en $b = \tfrac{1}{2} ka \sin q$. Geef zelf aan hoe j en q zijn gedefineerd.



De figuur links laat een Fraunhofer patroon zien dat ontstaan is door diffractie aan een vierkante apertuur.

d. Geef kwantitatief aan hoe dit patroon verandert als we de zijden van het vierkant met een factor twee vergroten. Wat gebeurt er als we in plaats daarvan de golflengte van het licht met een factor twee vergroten?